ANÁLISIS MATEMÁTICOS

TEMA 1. FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

1.1. Introducción

Simbología

$\exists$ *existe*	$\nexists$ *no existe*
$\in$ *pertenece*	$\notin$ *no pertenece*
$\forall$ *para todo*	$\not\forall$ *no para todo*
/ *tal que*	

Conjuntos numéricos

Naturales N = { 1, 2, 3…} como vemos el 0 no pertenece.
Enteros Z = { -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3…}
Racionales Q = { -1/2, -2, 1/2, 2…} no contiene los decimales sin periodo
Reales R = { …e, ∏, …} contiene números racionales sin periodo

Función

Transformación que convierte un número real en otro numero real.

$f(x) = x^2$ $f(2) = 2^2$

Para cada valor de x, tenemos un único valor.

Función Real de variable real

Son las funciones con una variable independiente.

1.2. Dominio

1.2.1. Dominio

Es el conjunto de valores de la variable x, para los cuales la función existe
El dominio viene caracterizado por el tipo de función.

$f(x) = \sqrt{x}$ $D=.\{x \geq 0\}$

Función Polinómica	El resultado es siempre positivo	D = {R}
Función exponencial	El resultado es siempre positivo	D = {R}
Función Racional	El denominador debe ser distinto de cero	$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ D = {x ϵ R / x-1 ≠ 0}
Función Irracional	El radicando debe ser mayor o igual a cero	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ n impar D = {R} n par D = {x ϵ R / g(x) ≥ 0}
Función logarítmica	Valores que hacen mayor de cero lo que hay dentro del logaritmo.	$f(x) = \log_e (g(x))=Ln (g(x))$ D = {x ϵ R / g(x) > 0}
Función trigonométrica	f(x) = sen g(x) → D = R f(x) = cos g(x) → D = R f(x) = tg g(x) → D = {xϵR/cos (g(x)) ≠ 0} ya que tgx = senx / cosx	

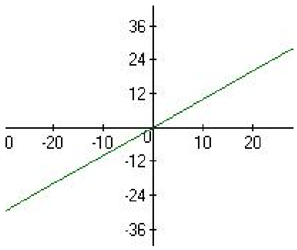
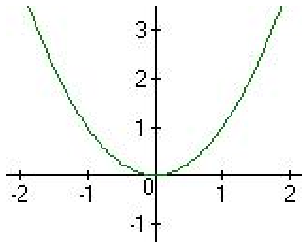
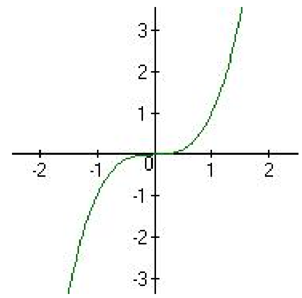
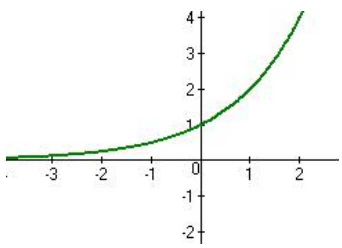
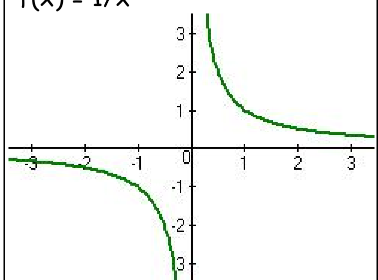
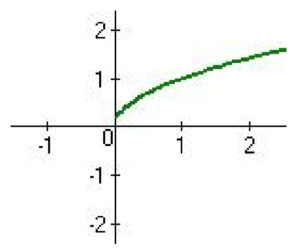
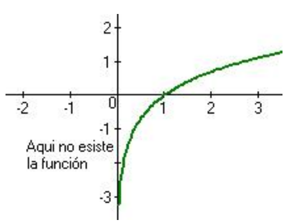
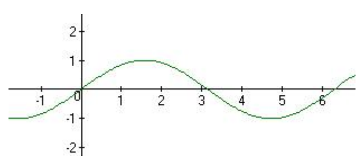
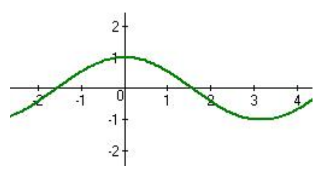
NOTA:

<u>Función Logarítmica</u>

El logaritmo es la función inversa de la exponencial
$\log_2 a = b \rightarrow$ $a = 2^b$
$\log_2 8 = 3 \rightarrow$ $2^3=8$

Logaritmo neperiano
$f(x) = \log_e x = Ln\ x$

1.2.2. Graficas fundamentales

<table>
<tr><td colspan="3">Polinómicas
Si resto o sumo números, generamos paralelas
Si añadimos coeficientes 2x, 3x… cambiamos la inclinación.</td></tr>
<tr><td>$f(x) = x$
</td><td>$f(x) = x^2$
</td><td>$f(x) = x^3$
</td></tr>
<tr><td><u>Exponenciales</u>
$f(x) = e^x$
</td><td><u>Función Racional.</u>
$f(x) = 1/x$
</td><td><u>Función Irracional.</u>
$f(x) = \sqrt{x}$
</td></tr>
<tr><td><u>Función Logarítmica.</u>
$f(x) = \text{Ln } x$

</td><td><u>Funciones trigonométricas.</u>
$f(x) = \text{sen } x$
</td><td><u>Funciones trigonométricas.</u>
$f(x) = \cos x$
</td></tr>
</table>

1.2.3. Ruffini. Factorización de polinomios ***

Consiste en separar las funciones polinómicas en productos de binarios.
Solo localizamos las raíces enteras.

$x^2 - 4x + 3$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 3 \\ 1 & & & \\ \hline & 1 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array}$$

* elegimos un numero que divida al termino independiente, en este caso serán; 1, -1, 3, -3. Vamos probando.
* Se tiene que anular el último termino.
*Hacemos lo mismo hasta anular

* El 1 y el 3 son solución de la ecuación, si sustituimos por estos valores tendríamos un 0.
* Al sustituir el polinomio en factores, ponemos el signo contrario de las soluciones, para descomponer y no anular, por tanto tenemos que:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

*También podríamos haber calculado las soluciones mediante la regla

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{(-b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.2.4. Relaciones trigonométricas ***

$\operatorname{tg} x = \frac{sen\,x}{\cos x}$
$sen^2 x + \cos^2 x = 1$
$sen 2x = 2 sen\,x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$

1.2.5. Relaciones Logarítmicas ***

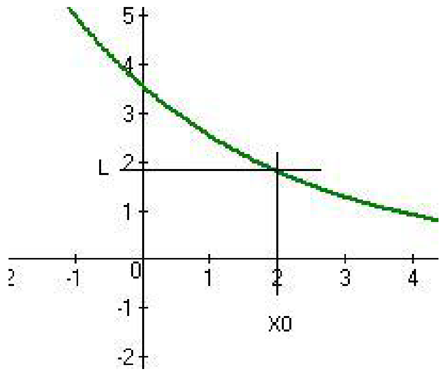
$\ln(a \cdot b) = ln\,a + ln\,b$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,a - ln\,b$
$\ln(a^b) = b\,ln\,a$
$\ln(8) = \ln(2^3) = 3\,ln 2$

1.3. Limites

1.3.1. Limites puntuales

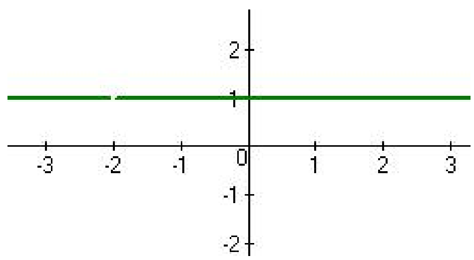
El límite de una función en un punto, es el valor al que tiende la función cuando nos acercamos a dicho punto.

$$\lim_{x \to xo} f(x) = L$$



El limite marca la tendencia, por tanto, no tiene porque existir la función en ese punto. Puede existir el límite, aunque no exista la función en ese punto.

$$f(x) = \frac{x+2}{x+2}$$



1.3.2. Limites laterales

Limite por la izquierda

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$$

Limite por la derecha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$$

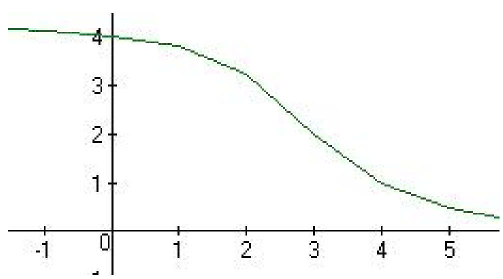
Para que exista el límite de una función, los límites laterales deben coincidir.

$$L_1 = L_2$$

1.3.3. Limites Infinitos

El límite de una función cuando tiene a infinito, indica el valor al que tiende la función para valores de "x" muy grandes.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$



En este caso, la función tiende a cero.

1.3.4. Tipos de soluciones

Indeterminadas	Determinadas
$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \infty - \infty$ $\quad 1^{\infty}$ $\quad 0 \cdot \infty$	$\frac{n}{0} = \pm\infty$ $\quad \frac{\infty}{0} = \pm\infty$ $\quad \frac{0}{n} = 0$ $\quad \frac{0}{\pm\infty} = 0$

1.3.5. Cálculo de límites

1.3.5.1. Indeterminadas tipo cociente 0/0

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0} \quad \textit{Indeterminado}$$

Salvamos la indeterminación simplificando

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

** En un dominio NO podemos simplificar, PERO en los limites si porque no estamos en el punto, sino que tendemos a el.

1.3.5.2. Indeterminadas tipo cociente $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{7x^2-x+2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para salvar la indeterminación, nos fijamos en los grados del polinomio y dividimos todo entre el mayor grado.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+2x+1}{7x^2-x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^2+2x+1}{x^2}}{\frac{7x^2-x+2}{x^2}} = \frac{3+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}{7-\frac{1}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}} = \frac{3+0+0}{7-0+0} = \frac{3}{7}$$

1.3.5.3. Indeterminación por raíces

Las raíces suelen provocar indeterminaciones del tipo $\infty - \infty$, pero hay que probar siempre, por si acaso.

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \sqrt{\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$$

Para evitar la indeterminación, hallamos el conjugado $a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b}$

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\infty}+\sqrt{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1.3.6. Teorema de Unicidad.

Si f(x) tiene limite en un punto x_0, dicho límite es único.

1.3.7. Infinitésimos

Diremos que una función f(x) es un infinitésimo en el punto x_0, si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Entre distintos infinitésimos se establecen órdenes de infinitud dependiendo del ritmo con que tienden a cero.
Así, se dice que dos infinitésimos f(x) y g(x) en x_o, son equivalentes cuando tienen el mismo ritmo, y en ese caso se cumple que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

1.3.8. Principio de Equivalencia

No varia el límite de un cociente indeterminado al reemplazar un infinitésimo por otro equivalente a él.

1.4. Continuidad

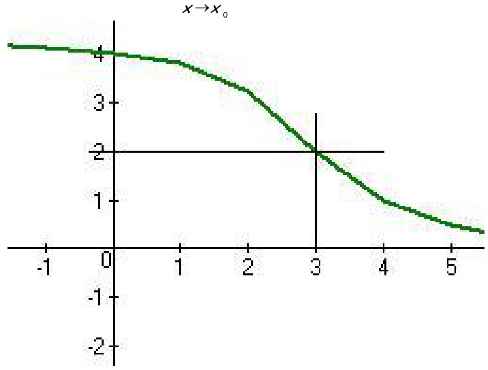
Una función f(x) es continua en un punto x_o si

Existe el límite en dicho punto

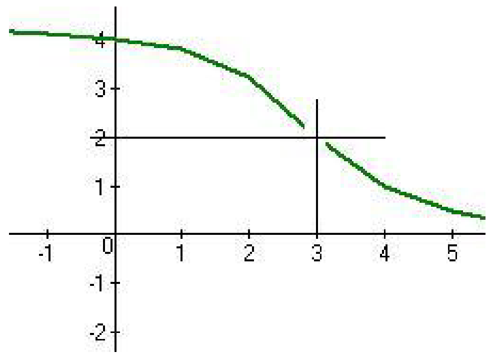
$$\lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

El límite coincide con el valor de la función en dicho punto

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_0)$$

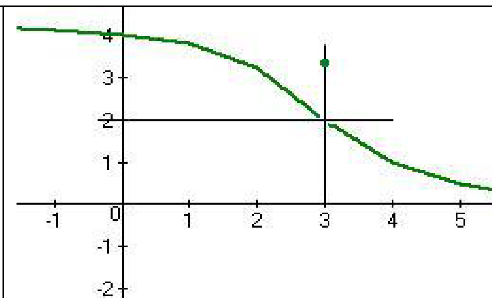
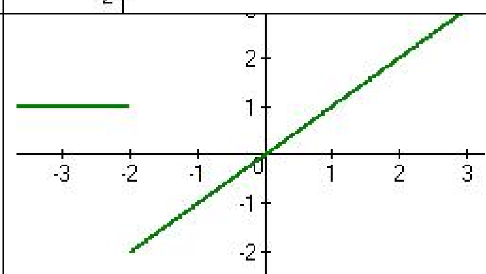
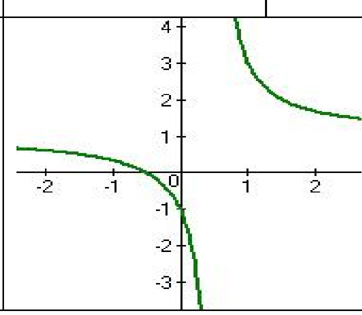


Continua en x_o=3



No continua en x_o=3

1.4.1. Tipos de discontinuidad

Evitable	Cuando existe el limite en x_o, pero la función no esta definida en dicho punto o toma un valor distinto al limite.	
Inevitable de primera especie. Cuando existen los limites laterales pero son distintos.	*Salto finito*. Cuando la diferencia entre los límites laterales es un número finito	
	Salto infinito. Cuando la diferencia entre los límites laterales es ∞ .	
Inevitable de segunda especie	Cuando alguno de los límites laterales o los dos, no existen.	

1.4.2. Continuidad genérica

Función Polinómica	Continua siempre
Función exponencial	Continua siempre
Función Racional	Continua en su dominio
Función Irracional	Continua en su dominio
Función Logarítmica	Continua en su dominio
Función trigonométrica	Continua siempre

1.4.3. Continuidad en intervalos

- Diremos que f(x) es continua en (a,b) cuando lo es en todos los puntos del intervalo, sin coger a ni b.
- Diremos que f(x) es continua en [a,b] cuando es continua en (a,b) y además es continua por la derecha de a y por la izquierda de b.

1.4.4. Propiedad de continuidad

La suma, el producto, el cociente y la composición de funciones continuas, es siempre otra función continua.

$f(x) = e^x$ $\quad$ $e^x + senx$ *funcion continua*

$g(x) = senx$ $\quad$ $e^x \cdot senx$ *funcion continua*

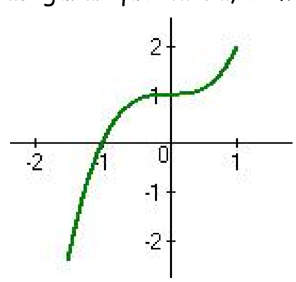
$f \circ g = f(g(x)) = e^{senx}$ función continua

$g \circ f = g(f(x)) = sen(e^x)$ función continua

1.4.5. Teoremas de Continuidad ***

Teorema de Bolzano

Si tenemos una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a,b], de manera que f(a) y f(b) tienen signos opuestos, entonces se puede asegurar que habrá, el menos un punto c entre a y b, donde f(c) = 0.



Teorema de los valores intermedios

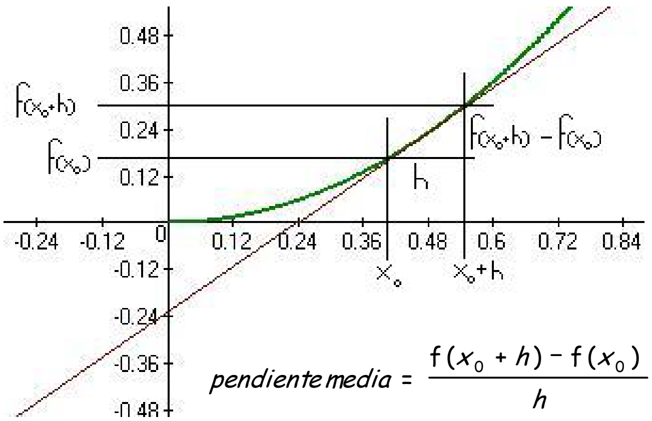
Si tenemos una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a,b], y m representa el menor valor de la función y M el mayor valor de la función, se puede asegurar que la función tomara todos los valores intermedios entre m y M.

TEMA 2: DERIVADAS

2.1. Introducción

La derivada de una función en un punto, representa la pendiente o inclinación de la curva de la función, en dicho punto.

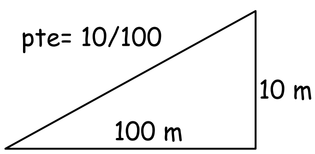
$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Hacemos que h->0, para calcular la pendiente en ese punto, por eso se calcula el limite.

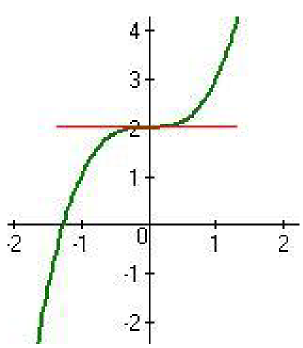
NOTA: Pendiente del 10%

pte= 10/100



2.2. Signos de la derivada

$f'(x) > 0$	Pendiente positiva	Función creciente
$f'(x) < 0$	Pendiente negativa	Función decreciente
$f'(x) = 0$	Pendiente nula	Punto de inflexión, punto máximo o punto mínimo



Pendiente nula -> punto de inflexión

2.3. Formulas principales de derivadas

$f(x) = C$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \operatorname{arcsen} x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

2.4. Reglas de derivación

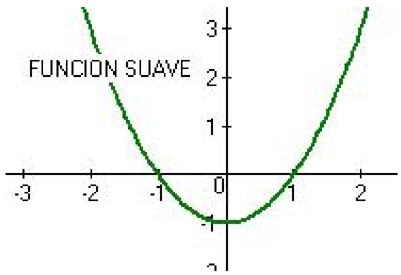
1º	$(K \cdot f(x))' = k \cdot f(x)'$
2º	$(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$
3º	$(f(x) \cdot g(x))' = (f(x)' \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g(x)')$
4º	$(f(x) / g(x))' = \frac{f(x)' \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)'}{g(x)^2}$
5º	Regla de la cadena. Para funciones compuestas. $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Primero derivamos la función más externa, luego la siguiente, etc…

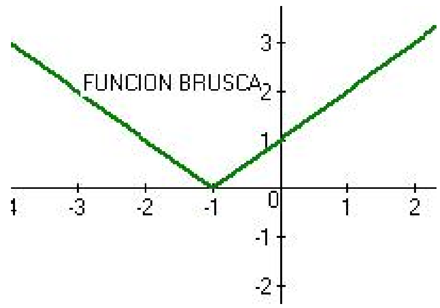
2.5. Derivabilidad

La derivabilidad consiste en saber si una función es derivable o no.
Las condiciones para que una función sea derivable son.

1º Para que una función f(x) sea derivable, debe ser obligatoriamente continua.

2º Para que una función f(x) sea derivable en un punto, debe tener unas pendiente definida en dicho punto, es decir, debe variar de forma suave en dicho punto



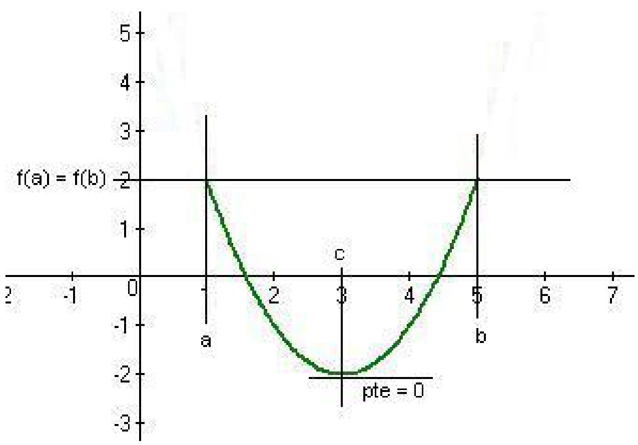


3º La derivabilidad en un punto, la comprobaremos calculando las derivadas laterales en dicho punto, ambas deben coincidir para verificar que f(x) es derivable en dicho punto.

4º La derivabilidad general de una función f(x), se comprueba haciendo su derivada y estudiando el dominio de la derivada obtenida.

2.6. Teorema de Rolle ***

Si tenemos una función f(x) continua en el intervalo cerrado [a.b] y derivable en el intervalo abierto (a,b) y además f(a) = f(b), entonces, existirá al menos un punto c entra a y b, de manera que f'(c) = 0.

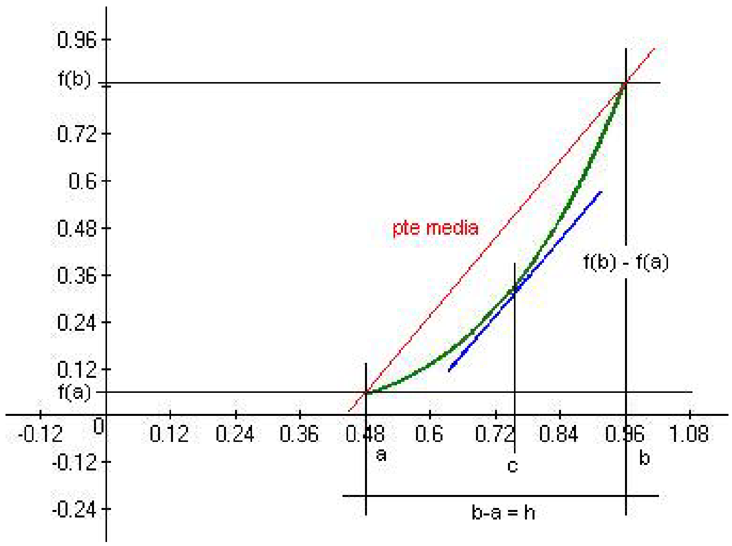


2.7. Teorema del valor medio o Cauchy ***

Si tenemos una función f(x) continua en el intervalo cerrado [a.b] y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existirá al menos un punto c entre a y b de manera que se cumpla

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Esto quiere decir que habrá al menos un punto donde su derivada sea igual a la pendiente media.



Ejemplo. Si vamos de viaje a una velocidad media de 100km/h, y vamos circulando entre 80km/h y 150km/h, en algún momento del viaje iremos exactamente a 100km/h.

2.8. Teorema de L'Hôpital ***

Si tenemos dos funciones f(x) y g(x) derivables y tenemos el siguiente limite indeterminado

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad o \quad \frac{0}{0}$$

Podemos decir que dicho limite coincide con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla se puede aplicar cuantas veces sea necesario para quitar la indeterminación.

2.9. Indeterminaciones especiales ***

Hay algunas indeterminaciones que no son las específicas de L'Hôpital, pero se pueden arreglar para poder aplicar el teorema de L'Hôpital. Dichas indeterminaciones son:

$0 \cdot \infty$

1^{∞}

La forma de proceder es la siguiente.

a)

$0 \cdot \infty$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0 \cdot \ln 0 = 0 \cdot (-\infty)$$

Vemos que tenemos una indeterminación, para salvarla, cambiamos uno de los coeficientes al denominador invertido, para continuar con la igualdad.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \leftarrow 0} \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty}$$ Ahora si podemos aplicar L`Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \leftarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0}(-x) = 0$$ Y queda resuelto el límite

b)

1^{∞}

$$\lim_{x \to 0} ((\cos x))^{\frac{1}{x}} = ((\cos 0\ ))^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$$

Vemos que tenemos una indeterminación, para salvarla hacemos el Ln del límite…

$$\operatorname{Ln}(L) = \lim_{x \to 0} \ln(((\cos x))^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \frac{\ln(\cos 0)}{0} = \frac{0}{0}$$

Y ahora si podemos aplicar L´Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = \frac{-0}{1} = 0$$

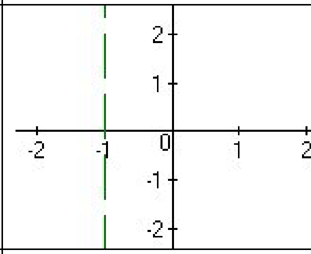
Pero este NO es el resultado del limite, sino del Ln del limite, por tanto, para hallar el resultado del límite debemos despejar.

$$\operatorname{Ln}(\lim) = 0 \Rightarrow \lim = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} ((\cos x))^{\frac{1}{x}} = 1$$

TEMA 3. ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES

3.1. Representación local de funciones

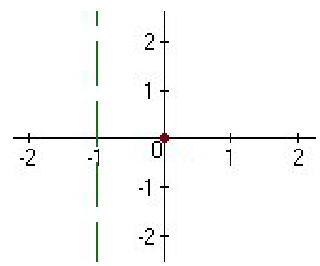
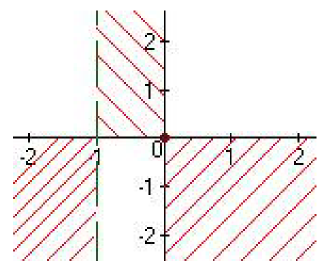
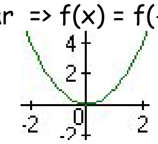
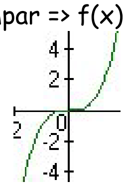
Es la representación grafica de una función, para ello debemos hacer 7 pasos indispensables.

<table>
<tr><td>PASOS IMPORTANTES</td><td>EJEMPLO PRACTICO $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$</td><td>GRAFICA DE LA FUNCIÓN</td></tr>
<tr><td>1º Dominio</td><td>$D = \{x \in R \;\forall\; x+1 \neq 0\}$
$D = R - \{-1\}$</td><td></td></tr>
<tr><td>2º Puntos de corte con los ejes
En el eje x -> f(x) = 0
En el eje y -> f(0) = ¿?

Signo de la función
Hacemos una tabla con los puntos críticos del dominio y los puntos de corte en el eje x.</td><td>Eje x f(x) = 0 => $\dfrac{x}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0$

Eje y f(0) = ¿?
$f(0) = \dfrac{0}{0+1} = \dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$

Signo de la función

-1 0
<table><tr><td></td><td>-2</td><td>-1/2</td><td>2</td></tr><tr><td>x</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr><tr><td>x+1</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>3º Simetría de la función
Par => f(x) = f(-x)

Impar => f(x) = - f(-x)
</td><td>Cogemos un punto al azar
x = 2
x = -2

$f(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$
$f(-2) = \dfrac{-2}{-2+1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$
NO es simetria->ASIMETRICA</td><td></td></tr>
<tr><td>4º Periocidad de la función
Solo consideramos periódicas a las funciones trigonométricas.</td><td>No es periódica</td><td></td></tr>
</table>

5° Asíntotas

Asíntotas Verticales. Una recta vertical que indica un valor de x, x_0, para el cual la función tiende a ±∞

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Están **siempre** asociadas a problemas de dominio, sobretodo en fracciones y logaritmos.

Asíntotas Horizontales. Una recta horizontal que indica a que valor tiende la función cuando x tiende a ±∞

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x)$$

Normalmente vale con +∞, excepto en exponenciales, donde calculamos +∞ y -∞

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Las asíntotas verticales NO pueden cruzarse con la función, PERO la horizontal SI puede cruzarse.

Asíntotas Oblicuas. Una recta oblicua que indica la tendencia de la función en ±∞.

y = mx + n

Donde

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx)$$

Solo se calculan cuando NO hay asíntotas horizontales

Asíntotas Verticales. Estudiamos todos los puntos críticos del dominio.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

Por tanto, tenemos una asíntota vertical en x = -1

Para saber exactamente que pasa en la asuntota, estudiamos los limites laterales en x = -1.

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1^-}{-1^- + 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1^+}{-1^+ + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

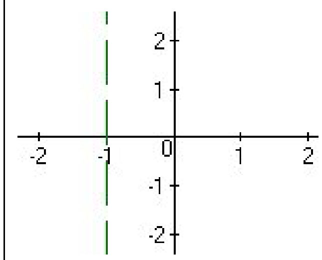
Asíntotas Horizontales. Hacemos el limite cuando x tiende a ±∞

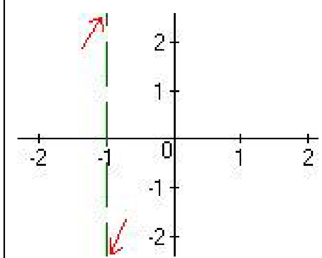
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'Hôpital$$

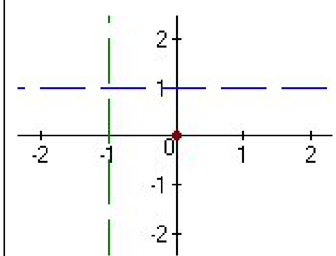
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto, tenemos una asíntota horizontal en y = 1

Asíntotas Oblicuas. Como tenemos una asíntota horizontal NO estudiamos las asíntotas Oblicuas.







6º Primera derivada

Crecimiento y Decrecimiento

Máximos y mínimos Relativos

6.1. Calculamos la derivada.

6.2. Igualamos a cero.

6.3. Resolvemos la ecuación y se hallan los puntos críticos.

- máximos
- mínimos
- Ptos. Inflexión

6.4. Hacemos la tabla de signos con:

- Ptos. Críticos de f(x)
- Ptos. Críticos de f'(x)

6.5. Estudiamos las zonas

f´(x) > 0 => Creciente

f´(x) < 0 => Decreciente

f`(x) = 0 => P. Inflexión

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

6.1. Calculamos la derivada.

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

6.2. Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

6.3. Resolvemos la ecuación.

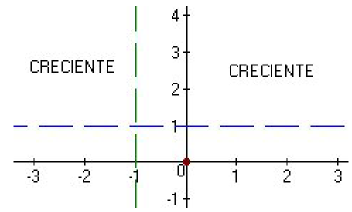
$1 = 0 \Rightarrow$ *Indeterminado*

Por tanto NO hay solución, así que NO hay puntos críticos de la derivada, por tanto NO hay máximos ni mínimos.

6.4. Hacemos la tabla

-1

	-2	1
f'(x)	+ Creciente	+ Creciente



7º Segunda derivada

Concavidad y Convexidad

**Solo lo hacemos si nos piden estas cualidades de la función, si no NO.

7.1. Calculamos la 2ª derivada

7.2. Igualamos a cero el resultado

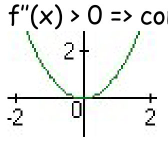
7.3. Resolvemos la ecuación y hallamos los puntos críticos de 2º orden, que son puntos de inflexión.

7.4. Hacemos la tabla de signos con:

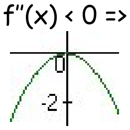
- ptos. Críticos f(x)
- ptos. Críticos f''(x)

7.5. Analizamos la concavidad y convexidad

f''(x) > 0 => convexa (cuchara)



f''(x) < 0 => cóncava



** Si tenemos algún punto critico donde f'(x) = 0, entonces:

f''(x) > 0 => mínimo relativo

f''(x) < 0 => máximo relativo

f''(x) = 0 => pto. Inflexión

7.1. Hacemos la 2ª derivada

$$f''(x) = \left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)' =$$

$$= ((x+1)^{-2})' = -2(x+1)^{-3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

7.2. Igualamos a cero

$$\frac{-2}{(x+1)^3} = 0$$

7.3. Resolvemos la ecuación

$-2 = 0 \Rightarrow$ *Indeterminado*

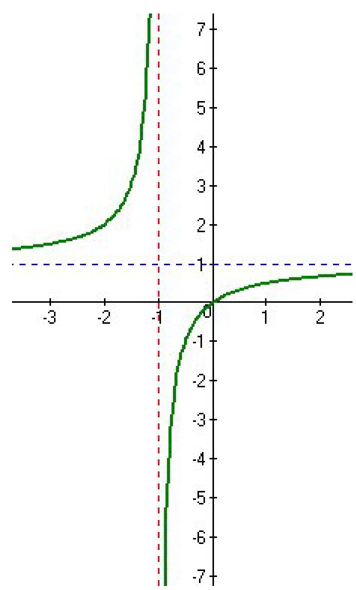
Por tanto NO hay puntos críticos de 2º orden, así que NO hay puntos de inflexión.

7.4. Hacemos la tabla

-1

	-2	0
f''(x)	+ Convexa	- Cóncava

Con todos estos datos ya podemos dibujar la función.



3.2. Polinomio de Taylor ***

El polinomio de Taylor de una función f en un punto x_0, es una aproximación polinómica de la función, capaz de sustituir a la propia función en puntos muy próximos a "x_0".
Se calcula a partir de derivadas sucesivas con la formula:

$$\boxed{P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f'^{n} x_0}{n!}(x - x_0)^n}$$

Ejemplo. Calcula el Polinomio de Taylor de grado 3 de la siguiente función.
$f(x) = \ln(2 - x) \; en \; x=1$

Según la teoría, la formula a seguir será;

$$P_n(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x - 1)^3$$

Así que vamos obteniendo cada operador

$$f(1) = \ln(2 - 1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(1) = \ln(2 - x)' = \frac{1}{2 - x}(-1) = -\frac{1}{2 - x} = -\frac{1}{2 - 1} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (2 - x) - (-1)(-1)}{(2 - x)^2} = \frac{-1}{(2 - x)^2} = \frac{-1}{(2 - 1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$f'''(x) \Rightarrow f''(x) = -(2 - x)^{-2} \Rightarrow f'''(x) = -(-2)(2-x)^{-3}(-1) = \frac{-2}{(2 - x)^3} = \frac{-2}{1} = -2$$

Por tanto, el polinomio de Taylor queda;

$$P_3(x) = 0 + \frac{-1}{1}(x - 1) + \frac{-1}{2}(x - 1)^2 + \frac{-2}{6}(x - 1)^3$$

$$P_3(x) = 0 - x + 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{3}(x - 1)^3$$

Y si sustituimos en el polinomio de Taylor por un valor muy cercano a x=1, vemos que se aproxima mucho a dicho valor, por ejemplo sustituimos por x = 1,1

$$P_3(1,1) = 0 - x + 1 - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{3}(x - 1)^3 = -1{,}1 + 1 - \frac{1}{2}(1{,}1 - 1)^2 - \frac{1}{3}(1{,}1 - 1)^3 =$$

$$= -0.1 - \frac{1}{2}0.1^2 - \frac{1}{3}0.1^3 = -0.1053$$

Queda comprobado que el polinomio de Taylor funciona correctamente.

**También podemos usar el Polinomio de Taylor para hallar la recta tangente en un punto indicado, sabiendo que:

$$\boxed{P_1(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) \Rightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = mx + n}$$

TEMA 4. INTEGRALES INDEFINIDAS

4.1. Introducción

La integral es una función que al derivarla, da lo de dentro de la integral

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \forall \; F'(x) = f(x)}$$

Algunos ejemplos de integrales

$\int 2x\,dx = x^2 + C$
$\int k\,dx = k\int dx = kx + C$
$\int x(2-x)^2\,dx = \int x(4-4x+x^2)dx = \int(4x - 4x^2 + x^3)dx = \int 4x\,dx - \int 4x^2\,dx + \int x^3\,dx$ $= 4\int x\,dx - 4\int x^2\,dx + \int x^3\,dx = 4\frac{x^2}{2} - 4\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^4}{4} + C = 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$
Derivada de lo de dentro $\int\sqrt{2x-1}\,dx = \int(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$ $= \frac{1}{3}\cdot(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3} + C$
Derivada de lo de dentro $\int x^2\sqrt{1-2x^3}\,dx = \int x^2(1-2x^3)^{\frac{1}{2}}dx = \left(-\frac{1}{6}\right)\int\left(-6x^2(1-2x^3)^{\frac{1}{2}}dx\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)\frac{(1-2x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \left(-\frac{1}{9}\right)\sqrt{(1-2x^3)^3} + C$
$\int e^{sen^2 x}\underbrace{(2\,sen\,x\cos x\,dx)}_{\text{Es la derivada de } (senx)^2} = e^{sen^2 x} + C$
$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x\cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$
$\int\frac{senx}{1-\cos x}dx = \ln(1-\cos x) + C$
$\int 2e^{\frac{x}{2}}dx = 2\int e^{\frac{x}{2}}dx = 2\cdot 2\int\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}dx = 4e^{\frac{x}{2}} + C$
$\int tg\,x\,dx = \int\frac{sen\,x}{\cos x}dx = -\int\left(-\frac{sen\,x}{\cos x}\right)dx = -\,ln\cos x + C$
$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + ln x + \frac{(1+x)^{-1}}{-1} + C = 2\sqrt{x} + ln x - \frac{1}{1+x} + C$

4.2. Tabla de Integrales Inmediatas

$\int k\,dx = kx + C$	$\int sen\,x\,dx = -\cos x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \cos x\,dx = sen\,x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\,x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen\,x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccos\,x + C$
	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\,x + C$

4.3. Integración por partes

Se usa cuando tenemos un producto de funciones, sin relación por la regla de la cadena.

$$\boxed{\int f(x)\,g(x)dx = uv - \int v\,du}$$

Sabiendo que los cambios que debemos elegir son:

$u \rightarrow derivar \rightarrow du$ Función que al derivarse se simplifique: polinomios, etc…

$dv \rightarrow integrar \rightarrow v$ Función que al integrase no se complique: exponencial, trigonométrica…

Algunos ejemplos de posibles cambios son:

$\int x^n e^x dx$	$u = x^n$ $v = e^x dx$
$\int x^n sen\,x\,dx$ $\int x^n \cos x\,dx$	$u = x^n$ $dv = sen\,x\,dx \quad dv = \cos x\,dx$
$\int e^x sen\,x\,dx$ $\int e^x \cos x\,dx$	Da igual cual cojamos
** $\int x^n \ln x\,dx$	$u = \ln x$ $dv = x^n dx$
** $\int x^n arcsen\,x\,dx$ $\int x^n arccos\,x\,dx$ $\int x^n arctg\,x\,dx$	$u = arcsen\,x \quad u = arccos\,x \quad u = arctg\,x$ $dv = x^n dx$

Ejemplos de Integración por partes.

a)

$\int x e^x dx$

$$u = x \Rightarrow du = 1\,dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x-1) + C$$

b)

$\int x^2 e^x dx$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x\,dx = x^2 e^x - 2\underbrace{\int x e^x dx}_{\text{Es la integral anterior}} = x^2 e^x - 2\left(e^x (x-1)\right) + C$$

c)

$\int x \cos x\,dx$

$$u = x \Rightarrow du = 1\,dx$$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = sen\,x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int x \cos x\,dx = x\,sen\,x - \int sen\,x\,dx = x\,sen\,x - (-\cos x) + C = x\,sen\,x + \cos x + C$$

d) ***

$\int e^x sen\,x\,dx$

Esta es una integral cíclica, hagamos el cambio que hagamos la función se vuelve a repetir.

$$u = sen\,x \Rightarrow du = \cos x\,dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int e^x sen\,x\,dx = sen\,x\,e^x - \int e^x \cos dx$$

Vemos que aparece la misma función, por tanto estamos obligados a hacer el mismo tipo de cambio

$$u = \cos x \Rightarrow du = -sen\,x\,dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int e^x sen\,x\,dx = sen\,x\,e^x - \int e^x \cos dx = sen\,x\,e^x - \left[\cos x\,e^x - \int e^x(-sen\,x)dx\right] =$$

$$= e^x sen\,x - e^x \cos x - \int e^x sen\,x\,dx = e^x(sen\,x - \cos x) - \int e^x sen\,x\,dx = \int e^x sen\,x\,dx$$

Vemos que la función se repite, por tanto, tenemos que:

$$e^x(sen\,x - \cos x) - I = I \Rightarrow 2I = e^x(sen\,x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{e^x(sen\,x - \cos x)}{2} + C$$

e)

$\int ln\,x\,dx$

$$u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int ln\,x\,dx = ln\,x\;x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x + C$$

f) Caso Particular **

$\int arcsen\,x\,dx$

$$u = arcsen\,x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int arcsen\,x\,dx = arc\,sen\,x \cdot x - \underbrace{\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{A} \Rightarrow$$

$$A = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{-1}{2}\int(-2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx) = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Por tanto, tenemos que

$$\int arcsen\,x\,dx = x\,arcsen\,x - (-\sqrt{1-x^2}) + C = x\,arcsen\,x + \sqrt{1-x^2} + C$$

g)

$\int arctg\,x\,dx$

$$u = arctgx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

Aplicamos la formula de la Integración por Partes

$$\int arctg\,x\,dx = arctg\,x \cdot x - \int x\frac{1}{1+x^2}\,dx = x\,arctg\,x - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{A}$$

$$A = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Por tanto, tenemos que

$$\int arctg\,x\,dx = x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

4.4. Integrales Racionales o descomposición en fracciones simples ***

Este método se usa para integrales de cociente de polinomios.

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

Para llevar a cabo este método de integración se deben seguir los siguientes pasos:

<table>
<tr><td rowspan="2">1° Se comparan los grados de ambos polinomios y podemos encontrarnos con dos situaciones</td><td>1.1. $grado\ p(x) \geq grado\ q(x) \Rightarrow DIVIDIMOS$
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \left(Cociente + \frac{Resto}{divisor} \right) dx$$</td></tr>
<tr><td>1.2. $grado\ p(x) < grado\ q(x) \Rightarrow PASO 2°$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2° Se descompone el polinomio del denominador q(x) mediante Ruffini y tenemos tres situaciones</td><td>2.1. Raíces Reales simples o distintas
$$q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ \forall\ a \neq b \neq c$$
En este caso, descomponemos la integral en factores, de la forma:
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \int \frac{C}{x-c}\,dx$$
Donde solo queda calcular el valor de A, B y C.
En estos casos, el resultado final son logaritmos.</td></tr>
<tr><td>2.2. Raíces Reales Múltiples
$$q(x) = (x-a)(x-b)^2(x-c)^3$$
En este caso, descomponemos la integral en factores, de la forma:
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \int \frac{C}{(x-b)^2}\,dx + \int \frac{D}{x-c}\,dx + \int \frac{E}{(x-c)^2}\,dx + \int \frac{F}{(x-c)^3}\,dx$$
En estos casos, el resultado final son logaritmos o potencias.</td></tr>
<tr><td>2.3. Raíces Complejas
$$q(x) = (x-a)(x-b)^2(cx^2 + dx + e)$$
Cuando vemos que uno de los factores NO se puede descomponer más.
En este caso, descomponemos la integral en factores, de la forma:
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,dx + \int \frac{B}{x-b}\,dx + \int \frac{C}{(x-b)^2}\,dx + \int \frac{Dx + E}{cx^2 + dx + e}\,dx$$
En este caso, el resultado final son logaritmos o potencias y el ultimo factor será un logaritmo o arctg o las dos.</td></tr>
<tr><td>3° CASO ESPECIAL TIPO ARCTG.</td><td>$$\int \frac{n}{ax^2 + bx + c}\,dx\ \forall\ ax^2 + bx + c\ \textit{No se puede descomponer}$$
En estos casos aplicamos la siguiente formula directamente:
$$\int \frac{n}{ax^2 + bx + c}\,dx = n\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = n \cdot \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot arctg\,\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$$</td></tr>
</table>

Vamos a realizar ejemplos de los casos expuestos en la tabla anterior.

a)

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$$

1º Como el grado de p(x) es mayor que el grado de q(x) realizamos la división.

$$\begin{array}{lll|l} x^3 & & 1 & x^2 \quad 1 \\ \cline{4-4} -x^3 & -x & & x \\ 0 & -x & 1 & \end{array}$$

2º Desarrollamos la integral con el resultado de la división.

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+1}dx = \int\left(x + \frac{1-x}{x^2+1}dx\right) = \int xdx + \int\frac{1-x}{x^2+1}dx = \int xdx + \int\frac{1}{x^2+1}dx - \int\frac{x}{x^2+1}dx =$$

$$= \int xdx + \int\frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} + arctg\,x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

b)

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx$$

1º Vemos que el grado del denominador es mayor, por tanto, pasamos al segundo punto, a desarrollar dicho denominador mediante Ruffini.

	1	-5	6
3		3	-6
	1	-2	0
2		2	
	1	0	

$$x^2-5x+6 = (x\text{-}3)(x\text{-}2)$$

2º Por tanto, la integral queda:

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx = \int\frac{A}{x-2}dx + \int\frac{B}{x-3}dx =$$

3º Desarrollamos el sistema de ecuaciones para hallar los valores de A y B.

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x\text{-}2)(x\text{-}3)} = \frac{Ax-A3+Bx-B2}{(x\text{-}2)(x\text{-}3)} \Rightarrow$$

$$x-4=-3A+Ax+Bx-2B \Rightarrow \textit{Damos valores}$$

$$x=2 \Rightarrow x-4=A(x-3)+B(x-2) \Rightarrow 2-4=A(2-3) \Rightarrow -2=-A \Rightarrow A=2$$

$$x=3 \Rightarrow x-4=A(x-3)+B(x-2) \Rightarrow 3-4=B(3-2) \Rightarrow -1=B \Rightarrow B=-1$$

4º Desarrollamos la integral desde el principio.

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx = \int\frac{A}{x-2}dx + \int\frac{B}{x-3}dx = \int\frac{2}{x-2}dx + \int\left(-\frac{1}{x-3}\right)dx =$$

$$=2\int\frac{1}{x-2}dx - \int\frac{1}{x-3}dx = 2\ln(x-2) - \ln(x-3) + C = \ln\left(\frac{(x-2)^2}{x-3}\right) + C$$

c)

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$$

1º Vemos que el grado del denominador es mayor, por tanto, pasamos al segundo punto, a desarrollar dicho denominador mediante Ruffini.

	1	-2	1
1		1	-1
	1	-1	0
1		1	
	1	0	

$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)(x-1)$

2º Por tanto, la integral queda:

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x-1}dx + \int \frac{C}{(x-1)^2}\,dx =$$

3º Desarrollamos el sistema de ecuaciones para hallar los valores de A, B y C.

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Damos valores a x para hallar las incógnitas.

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A(0-1)^2 + B\cdot 0\cdot(0-1) + C\cdot 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = A(1-1)^2 + B(1-1) + C \Rightarrow C = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 1 = A(2-1)^2 + B\cdot 2\cdot(2-1) + C\cdot 2 \Rightarrow 1 = A + 2B + 2C \Rightarrow 1 = 1 + 2B + 2 \Rightarrow B = -1$$

4º Desarrollamos la integral desde el principio.

$$\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \left(-\frac{1}{x-1}\right)dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \ln x - \ln(x-1) + \int (x-1)^{-2}\,dx =$$

$$= \ln x - \ln(x-1) + \int (x-1)^{-2}\,dx = \ln x - \ln(x-1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \ln x - \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + C =$$

$$= \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + C$$

d)

$$\int \frac{1}{x^3 + x}dx$$

1º Vemos que el grado del denominador es mayor, por tanto, pasamos al segundo punto, a desarrollar dicho denominador mediante Ruffini.

	1	0	1
-1		-1	1
	1	-1	NO
	1	0	1
1		1	1
	1	1	NO

$x^3 + x = x(x^2 + 1)$

Vemos que el segundo factor NO se puede descomponer, asi que estamos en el caso 2.3.

2º Por tanto, la integral queda:

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

3º Desarrollamos el sistema de ecuaciones para hallar los valores de A, B y C.

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x)}{x(x^2+1)} \Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \Rightarrow$$

$$Ax^2 + Bx^2 = 0$$

$$Cx = 0$$

$$A = 1$$

Por tanto, despejando el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$$A = 1$$

$$A + B = 0 \Rightarrow 1 + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$C = 0$$

4º Desarrollamos la integral desde el principio.

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-1x+0}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-1x}{x^2+1}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + C$$

e)

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2+x}dx$$

1º Como el grado de p(x) es igual que el grado de q(x) realizamos la división.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
x^3 & & & 1 & x^3 & x^2 & x \\ \cline{5-7}
-x^3 & -x^2 & -x & & 1 & & \\
0 & -x^2 & -x & 1 & & &
\end{array}$$

2º Desarrollamos la integral con el resultado de la división.

$$\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2+x}dx = \int 1\,dx + \underbrace{\int \frac{-x^2-x+1}{x^3+x^2+x}dx}_{I_1} =$$

Dividimos la integral en diferentes partes.

Estudiamos esta primera parte de la integral.

Descomponemos el denominador en factores mediante Ruffini

	1	1	1
1		1	2
	1	2	NO
	1	1	1
-1		-1	0
	1	0	NO

$$x^3 + x^2 + x = x(x^2+x+1)$$

Vemos que el segundo factor NO se puede descomponer en factores, por tanto, tenemos que la parte I_1 es:

$$I_1 = \int \frac{-x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$\frac{-x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + x} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (Bx+C)x}{x(x^2 + x + 1)} \Rightarrow -x^2 - x + 1 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = A + B \\ -1 = A + C \\ 1 = A \end{array}\right\} \qquad \boxed{\begin{array}{l} A = 1 \\ C = -2 \\ B = -2 \end{array}}$$

Desarrollamos la integral desde el principio.

$$I_1 = \int \frac{-x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{1}{x} dx + \overbrace{\int \frac{-2x - 2}{x^2 + x + 1} dx}^{I_2} =$$

Estudiamos esta segunda parte de la integral.

$$I_2 = \int \frac{-2x - 2}{x^2 + x + 1} dx = -\int \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} dx = -\left[\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \overbrace{\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx}^{I_3} \right] =$$

Intentamos sacar un ln

Estudiamos la tercera parte de la integral.

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 - 1}} \cdot arctg \frac{2 \cdot 1 \cdot x + 1}{\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 1 - 1}}$$

En este caso, estamos en el punto 3º, por tanto, aplicamos la formula directamente.
Finalmente, unimos todas las partes de la integral para hallar el valor total de la misma.

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + x} dx = \int 1 dx + I_1 = \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx + I_2 = \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx - I_3 =$$

$$= x + lnx - \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{\sqrt{4 - 1}} \cdot \text{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{4 - 1}}\right) + C = x + lnx - \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \text{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

4.5. Integrales de Cambio de Variable ***

Hay diferentes tipos de cambio de variable, así que iremos viendo un ejemplo de los mas significativos.

4.5.1. Cambio de variable Personalizado

En estos casos, debemos elegir una función que no sea demasiado grande y tenga algo raro, como logaritmos, etc…

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array}}$$

Hay otra forma de sacar el valor de dx, que es hallando el valor de la x y derivando, por ejemplo:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{t}{e^t} e^t\, dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{t = \ln x \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt}$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C = \ln(\ln x) + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array}}$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\, dx \end{array}}$$

4.5.2. Cambio de variable para Integrales Irracionales

Lo usamos para integrales formadas por Raíces de Polinomios de primer grado.
Usamos el cambio de variable para quitarnos la raíz.

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx \underset{\text{SUSTITUIMOS}}{=} \int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt = \int (2t^4 + 2t^2)\,dt =$$

$$\boxed{t=\sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2+1 \Rightarrow dx = 2t\,dt}$$

$$= 2\int t^4\,dt + 2\int t^2\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5}\right) + 2\left(\frac{t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{5}\sqrt{x-1}^{5} + \frac{2}{3}\sqrt{x-1}^{3} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$$

En este caso tenemos que quitar ambas raíces, para poder hacer esto, lo de dentro de la raíz debe ser lo mismo en ambas. Hacemos el siguiente cambio de variable y sustituimos.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = t^2 \\ x_1 = t^3 \end{array}\right\} x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt \qquad \text{Sacamos el m.c.m. del exponente}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{\sqrt{t^6}-1}{1-\sqrt[3]{t^6}}\,6t^5\,dt = \int \frac{t^3-1}{1-t^2}\,6t^5\,dt = 6\overbrace{\int \frac{t^8-t^5}{1-t^2}\,dt}^{I} =$$

$$I = \int \frac{t^8-t^5}{1-t^2}\,dt = \mathit{INTEGRAL\ \ DE\ \ POLINOMIOS}$$

1º Dividimos

$$\begin{array}{cccccccc|l}
t^8 & & -t^5 & & & & & & -t^2 \quad 1 \\ \cline{9-9}
-t^8 & t^6 & & & & & & & -t^6 \quad -t^4 \quad t^3 \quad -t^2 \quad t \quad -1 \\
0 & t^6 & -t^5 & & & & & & \\
 & -t^6 & & t^4 & & & & & \\
 & 0 & -t^5 & t^4 & & & & & \\
 & & t^5 & & -t^3 & & & & \\
 & & 0 & t^4 & -t^3 & & & & \\
 & & & -t^4 & & t^2 & & & \\
 & & & 0 & -t^3 & t^2 & & & \\
 & & & & t^3 & & -t & & \\
 & & & & 0 & t^2 & -t & & \\
 & & & & & -t^2 & & 1 & \\
 & & & & & 0 & -t & 1 &
\end{array}$$

2º Hacemos la ecuación, sabiendo que: $D = d \cdot c + R \Rightarrow \frac{D}{d} = c + \frac{R}{d}$

$$\int \left[-t^6 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \overbrace{\frac{1-t}{1-t^2}dt}^{I_2} \right] = I$$

3º Tenemos que I_2 vale:

$$I_2 = \int \frac{1-t}{1-t^2}dt = \int \frac{1-t}{(1+t)(1-t)}dt = \int \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+t) + C$$

4º Por tanto, la integral total vale:

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{1-\sqrt[3]{x}}dx = 6\left[\int(-t^6 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1\,dt) + \ln(1+t)\right] = 6\left[-\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t) + C\right] =$$

$$= -\frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + \frac{6t^4}{4} - \frac{6t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} - 6t + 6\ln(1+t) + C =$$

$$= -\frac{6(\sqrt[6]{x})^7}{7} - \frac{6(\sqrt[6]{x})^5}{5} + \frac{3(\sqrt[6]{x})^4}{2} - 2(\sqrt[6]{x})^3 + 3(\sqrt[6]{x})^2 - 6(\sqrt[6]{x}) + 6\ln(1+\sqrt[6]{x}) + C$$

4.5.3. Cambio de variable para Integrales Irracionales Trigonométricas ***

En este caso tenemos 3 tipos diferentes

TIPO	CAMBIO
$\int f(\sqrt{a-x^2})dx$	$x=\sqrt{a}\,sent$ $dx=\sqrt{a}\cos t\,dt$
$\int f(\sqrt{x^2-a})dx$	$x=\dfrac{\sqrt{a}}{sen\,t}$ $dx=-\dfrac{\sqrt{a}\cos t}{sen^2 t}dt$
$\int f(\sqrt{a+x^2})dx$	$x=\sqrt{a}\,\mathrm{tg}\,t$ $dx=\dfrac{\sqrt{a}}{\cos^2 t}dt$

TABLA MUY IMPORTANTE

A continuación detallamos un ejemplo de cada cambio de variable.

1º

$$\int\sqrt{2-x^2}\,dx=\int\sqrt{2-((\sqrt{2}\,sent))^2}\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt=$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\,sen\,t\\ dx=\sqrt{2}\cos t\,dt\end{array}}$$

$$=\int\sqrt{2-2sen^2 t}\;\sqrt{2}\cos t\,dt=\int\sqrt{2(1-sen^2 t)}\sqrt{2}\,cost\,dt=\int\sqrt{2\cos^2 t}\;\sqrt{2}\,cost\,dt=$$

$$=\int\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sqrt{\cos^2 t}}\,\cancel{\sqrt{2}}\cos t\;dt=\int 2\cos t\cos t\,dt\;=\int 2\cos^2 t\,dt=2\int\cos^2 dt$$

La integral resultante se resolverá mas adelante con el método 4.5.4.

2°

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{sent}\right)^2 - 1}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{1}}{sen\,t} = \dfrac{1}{sen\,t} \\ dx = \left(-\dfrac{\sqrt{1}\cos t}{sen^2 t}\right) dt = \left(-\dfrac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt \end{array}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - sen^2 t}{sen^2 t}}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt = \; = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t}{sen^2 t}}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt = \int = \int \frac{1}{\frac{\cos t}{sent}} \cdot \left(-\frac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt =$$

$$= \int \frac{sent}{cost} \cdot \left(-\frac{\cos t}{sen^2 t}\right) dt = \int \left(-\frac{1}{sent}\right) dt$$

La integral resultante se resolverá mas adelante con el método 4.5.4.

3°

$$\int \sqrt{4 + x^2}\,dx = \int \sqrt{4 + 2^2 \mathrm{tg}^2 t}\;\; \frac{2}{\cos^2 t} dt = \int \sqrt{4(1 + \mathrm{tg}^2 t)}\;\; \frac{2}{\cos^2 t} dt =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \sqrt{4}\ \mathrm{tg}\, t = 2\,tg\,t \\ dx = \dfrac{\sqrt{4}}{\cos^2 t}\, dt \end{array}}$$

$$= \int \sqrt{\frac{4}{\cos^2 t}}\; \frac{2}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{2}{cost}\; \frac{2}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{4}{\cos^3 t} dt = 4\int \frac{1}{\cos^3 t} dt$$

La integral resultante se resolverá mas adelante con el método 4.5.4.

4.5.4. Cambio de variable para Integrales Trigonométricas ***

Se usa para funciones del tipo

$$\int f(senx,\ cosx)dx$$

Hay cuatro tipos posibles, según sean las integrales trigonométricas;

TIPO DE FUNCION	TIPO DE CAMBIO
IMPAR en SENO $f(-senx) = -f(senx)$	$\cos x = t$ $senx = \sqrt{1-t^2}$ $dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
IMPAR en COSENO $f(-cosx) = -f(cosx)$	$senx = t$ $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ $dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$
PAR en SENO y COSENO $f(-senx,\ -cosx) = f(senx,\ cosx)$	$tg\, x = t$ $senx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$
El resto de Integrales Trigonométricas	$tg\,\frac{x}{2} = t$ $senx = \frac{2t}{1+t^2}$ $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Los cambios vistos en la tabla anterior se sacan de relaciones trigonométricas, a continuación veremos como hemos conseguido dichos cambios.

a) Cambio para Integrales Trigonométricas Impar en Seno

$$cosx = t \Rightarrow sen^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow sen^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow sen^2 x = 1 - t^2 \Rightarrow senx = \sqrt{1-t^2}$$

$$cosx = t \Rightarrow dt = -\,senx\,dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{senx} = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

b) Cambio para Integrales Trigonométricas Impar en Seno

Es el mismo razonamiento anterior pero cambiando el seno por el coseno y viceversa.

c) Cambio para Integrales Trigonométricas Par en Seno y Coseno

$$tgx = t \Rightarrow 1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{senx}{cosx} \Rightarrow senx = tgx\,cosx = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$dt = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \Rightarrow dx = \cos^2 dt = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

A continuación vemos unos ejemplos de cada uno de los cambios analizados anteriormente.

a) Cambio para Integrales Trigonométricas Impar en Seno

$$\int sen^3 x \cos^2 x$$

Vemos que es de seno impar ya que:

$$sen^3 x \cos^2 x = (-sen^3 x)\cos^2 x = -\,sen^3 x \cos^2 x \quad \textit{Cambia el signo de la funcion}$$

Así que hacemos el cambio señalado:

$$cosx = t$$

$$senx = \sqrt{1-t^2}$$

$$dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Tenemos que:

$$\int sen^3 x \cos^2 x\,dx = \int \sqrt{1-t^2}^{\,2\cancel{3}}\, t^2 \frac{-1}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}dt = -\int \cancel{\sqrt{1-t^2}}^{\,2\cancel{2}}\, t^2\,dt = -\int (1-t^2)t^2\,dt =$$

$$= -\int (t^2 - t^4\,dt) = -\int t^2\,dt + \int t^4\,dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5}{5} + C$$

b) Cambio para Integrales Trigonométricas Impar en Seno

$$\int sen^4 x \cos x \, dx$$

Comprobamos que es Impar de Coseno y hacemos los cambios explicados en la tabla

$$sen\, x = t$$

$$\cos x = \sqrt{1 - t^2}$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$$

$$\int sen^4 x \cos x \, dx = \int t^4 \cancel{\sqrt{1 - t^2}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{1 - t^2}}} dt = \int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{sen^5 x}{5} + C$$

c) Cambio para Integrales Trigonométricas Par en Seno y Coseno

$$\int \frac{1}{sen^2 x} dx$$

Comprobamos que es par, ya que aunque cambies el signo de seno, la función NO cambia de signo, así que hacemos los cambios del tercer caso.

$$t = tgx$$

$$senx = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$cosx = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$$dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$$

La función queda como:

$$\int \frac{1}{sen^2} dx = \int \frac{1}{\left(\left(\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right)\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt = \int \frac{\cancel{\sqrt{1 + t^2}^{2}}}{t^2} \cdot \frac{1}{\cancel{1 + t^2}} dt = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} \, dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\mathrm{tg}\, x} + C = -\frac{cosx}{senx} + C$$

d) El resto de integrales trigonométricas.

$$\int \frac{1}{1+cosx}\,dx$$

Comprobamos que dicha función NO cumple las propiedades anteriores y hacemos los cambios explicados en la tabla:

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$$

$$senx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

La función queda:

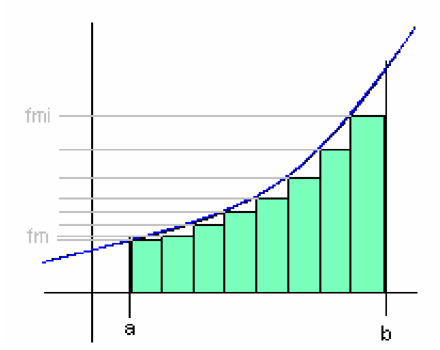
$$\int \frac{1}{1+cosx}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int dt = t + C =$$

$$= \text{tg}\frac{x}{2} + C = \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

TEMA 5. INTEGRAL DEFINIDA

5.1. Introducción

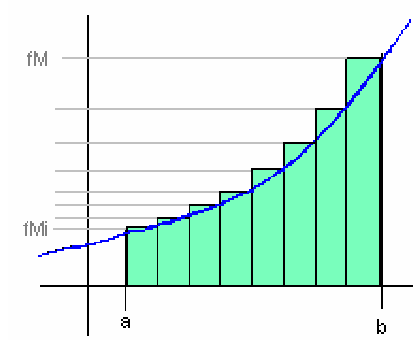
La integral se usa para hallar el área de formas no conocidas.
Dividimos dichas formas en otras de las que si conocemos su área, por ejemplo rectángulos,



área = b · altura

$$a_i = f(m_i)\,\Delta x$$

$$s = \sum f(m_i)\,\Delta x$$



área = b · altura

$$A_i = f(M_i)\,\Delta x$$

$$S = \sum f(M_i)\,\Delta x$$

Observando las figuras anteriores, vemos que el cálculo del área se puede hacer por defecto o por exceso, según esto tenemos que:

s = calculo del área por defecto = SUMA INFERIOR DE RIEMANN

S = calculo del área por exceso = SUMA SUPERIOR DE RIEMANN

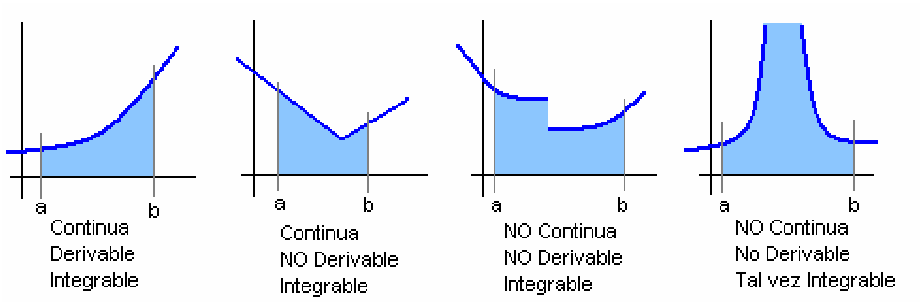
Por tanto,
La mejor de todas las sumas inferiores con un troceado mayor, se llama Integral Inferior de Riemann.
La mejor de todas las sumas superiores con un troceado mayor, se llama Integral Superior de Riemann.

Si la integral superior y la integral inferior coinciden, el resultado es la **Integral Definida**.

$$\int_a^b f(x)dx$$

5.2. Integrabilidad

Una función es integrable si tiene un área definida entre la función y el eje.
Aquí vemos unos ejemplos de funciones:



Por tanto, podemos decir que:

> "Para que una función f(x) sea Integrable en un intervalo cerrado [a,b], deberá ser por lo menos, discontinua de salto finito"

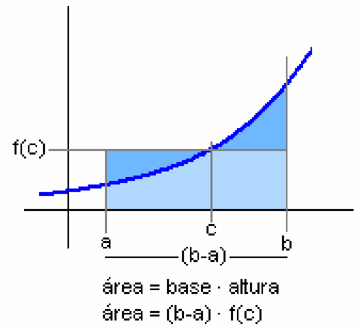
5.3. Propiedades de las Integrales

1. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
3. $Si\ f(x) \geq 0 \ \ \forall \ \ x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
4. $Si\ f(x) \geq g(x) \ \ en\ [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
5. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$
6. $\int_a^a f(x)dx = 0$
7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
8. $Si\ a < c < b \ \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5.4. Teorema del Valor Medio ***

Si tenemos una función f(x) continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces existirá al menos un punto c ϵ [a,b], de manera que cumpla

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)}$$



Referente a este teorema nos pueden hacer dos cuestiones muy importantes:

- cuanto vale c, que es el punto de Valor Medio
- cuanto vale f(c) que es el Valor Medio de la función.

Ejemplo

1. De la siguiente función,

   a) es continua

   b) Aplicar el Teorema del Valor Medio y hallar dicho valor.

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \forall \ [-2,2]$$

a) La función es continua, ya que es un polinomio.

b) Aplicamos el Teorema del Valor Medio.

$$\int_{-2}^{2}(4 - x^2 dx) = f(c)(b-a) = f(c)(2-(-2)) = 4f(c)$$

$$\int_{-2}^{2}(4 - x^2 dx) = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)_{-2}^{2} = \left(4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Por tanto, el Valor Medio de la función es:

$$\frac{32}{3} = 4f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

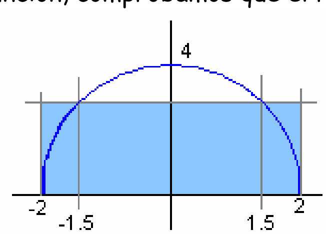
Y que el punto de Valor Medio es:

$$f(c) = \frac{8}{3} = 4 - c^2 \Rightarrow c^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Como el valor debe estar dentro del intervalo, vemos que tenemos dos puntos medios

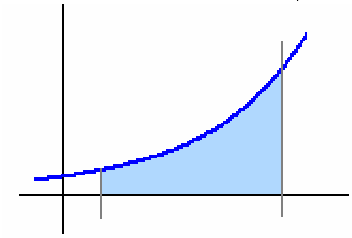
$$c = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad y \quad c = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Observando la grafica de la función, comprobamos que el resultado es correcto.



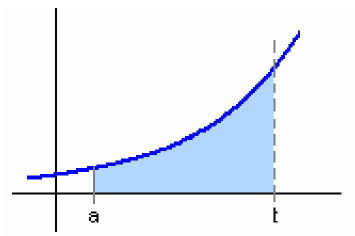
5.5. Función Integral *** Examen Seguro

Como hemos visto anteriormente, la integral es el área de la zona que hay entre la función y el eje



$$\int_a^b f(x)dx = AREA$$

Pero, si queremos el área de una figura en la que un extremo del intervalo varía, tendremos dicha área en función de una variable t, esto se conoce como Función Integral Definida Variable.



$$AREA = \int_a^t f(x)dx = F(t) \quad FUNCION \quad INTEGRAL$$

La función integral tiene las siguientes propiedades:

a) La función integral F(t) SIEMPRE es continua

b) La función Integral F(t) es UNICA (nunca lleva el + C)

5.6. Teorema Fundamental del Cálculo Integral (TFCI) *** Examen Seguro

Si Tenemos una función f(x) continua en el intervalo cerrado [a,b] y tenemos su función integral F(t), entonces F(t) será continua, derivable y F'(t) = f(t).
Estas características se cumplen SIEMPRE.

$$\boxed{F(t) = \int_a^t f(x)dx \Rightarrow F'(t) = f(t)}$$

NOTA: El TFCI es muy útil para indicar que:
Si f(x) es continua -> F(t) es derivable
Si f(x) no es continua -> F(t) no es derivable

Ejemplo. La siguiente Función Integral es derivable?

$$F(t) = \int_1^t \frac{sen^2 x \cos^3 x}{7 - cosx}dx$$

Por el TFCI sabemos que si f(x) es continua, F(t) será derivable, por tanto, estudiamos la continuidad de f(x),

$$D = \{x \in R \ \forall \ 7 - cosx \neq 0\} = \{x \in R \ \forall \ cosx \neq 7\} \Rightarrow D = R$$

Vemos que f(x) siempre es continua, ya que la función coseno solo varia entre 1 y -1, por tanto F(t) es derivable en todo R.

5.7. Regla de Barrow

Si Tenemos una función f(x) continua en el intervalo cerrado [a,b] y tenemos su función integral F(t), entonces podemos decir que:

$$\boxed{F(t) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Es la explicación teórica de cómo se hacen las Integrales Definidas.

5.8. La Derivada de la Función Integral *** Examen Seguro

Existen diferentes variantes de la función Integral, a continuación se ven todas y se explica como hacer la derivada.

Función Integral	Derivada de la Función Integral	Ejemplo
$F(t) = \int_a^t f(x)dx$	$F'(t) = f(t)$ Es la Función Integral Clásica.	
$F(t) = \int_t^b f(x)dx$	$F(t) = -\int_b^t f(x)dx \Rightarrow F'(t) = -f(t)$	$F(t) = \int_t^2 \arcsen(\sqrt{\ln x + 1})dx \Rightarrow$ $F(t) = -\int_2^t \arcsen(\sqrt{\ln x + 1})dx \Rightarrow$ $F'(t) = -f(t) = -\arcsen(\sqrt{\ln t + 1})$
$F(t) = \int_a^{g(t)} f(x)dx$	$F'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ Parecida a la Regla de la Cadena.	$F(t) = \int_1^{\cos t} \ln\left(\frac{x+1}{x^2}\right)dx \Rightarrow$ $F'(t) = \ln \frac{\cos t + 1}{\cos^2 t} \cdot (-\operatorname{sen} t)$
$F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x)dx$	$F(t) = \int_{h(t)}^{c} f(x)dx + \int_c^{g(t)} f(x)dx =$ $= -\int_c^{h(t)} f(x)dx + \int_c^{g(t)} f(x)dx \Rightarrow$ $F'(t) = -f(h(t)) \cdot h'(t) + f(g(t)) \cdot g'(t)$ $F'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) - f(h(t)) \cdot h'(t)$ Parecido a la Regla de Barrow.	$F(t) = \int_{e^t}^{\ln t} \arccos \frac{\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{tg} x}dx \Rightarrow$ $F'(t) = \arccos\left(\frac{\sqrt{\ln^2 t + 1}}{\operatorname{tg}(\ln t)}\right) \cdot \frac{1}{t} -$ $-\arccos\left(\frac{\sqrt{e^{2t} + 1}}{\operatorname{tg}(e^t)}\right) \cdot e^t$
$F(t) = \int_a^t g(t) f(x)dx$	$F(t) = g(t) \cdot \int_a^t f(x)dx \Rightarrow$ $F'(t) = g'(t) \cdot \int_a^t f(x)dx + g(t) \cdot f(t)$ Hacemos la derivada de un producto.	$F(t) = \int_1^t t^2 e^x dx = t^2 \int_1^t e^x dx \Rightarrow$ $F'(t) = 2t \int_1^t e^x dx + t^2 e^t =$ $= 2t \cdot e^x]_1^t + t^2 e^t = 2t(e^t - e^1) + t^2 e^t$

Ejercicio Típico de Examen.

Hacer el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \sqrt{x^2+1}\,dx}{sen\,t}$$

La integral definida entre el mismo numero es nula.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t \sqrt{x^2+1}\,dx}{sen\,t}=\frac{\int_0^0 \sqrt{x^2+1}\,dx}{sen\,0}=\frac{0}{0}$$

Por tanto, aplicamos L'Hopital

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\Rightarrow \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+1}}{cos t}=\frac{\sqrt{0^2+1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

5.8. Función Integral en varios tramos

Se estudia la función integral en cada tramo de forma independiente, pero teniendo en cuenta el tramo anterior, ya que la Función Integral es como una gran suma…

Ejemplo.

Calcular F(t) de f(x) en el intervalo [0,3]

$$f(x)=\begin{cases}2x & \forall\ \ 0\le x\le 1\\ x+2 & \forall\ \ 1< x\le 3\end{cases}$$

Observando f(x) tendremos que F(t) será:

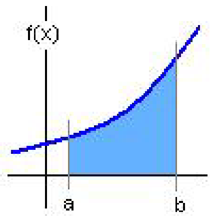
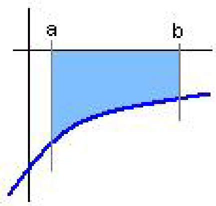
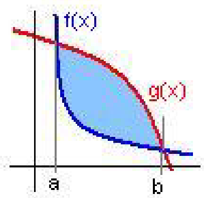
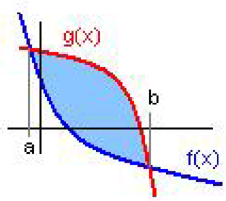
$$F(t)=\begin{cases}\int_0^t 2x\,dx & \forall\ \ 0\le t\le 1\\ \int_0^1 2x\,dx+\int_1^t (x+2)\,dx & \forall\ \ 1< t\le 3\end{cases}\Rightarrow F(t)=\begin{cases}x^2\big|_0^t\ \forall\ \ 0\le t\le 1\\ x^2\big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^t & \forall\ \ 1< t\le 3\end{cases}$$

Calculando la Función Integral, tenemos:

$$F(t)=\begin{cases}t^2-0^2 & \forall\ \ 0\le t\le 1\\ 1^2-0^2+\frac{t^2}{2}+2t-\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right) & \forall\ \ 1< t\le 3\end{cases}\Rightarrow F(t)=\begin{cases}t^2 & \forall\ \ 0\le t\le 1\\ \frac{t^2}{2}+2t-\frac{3}{2} & \forall\ \ 1< t\le 3\end{cases}$$

5.9. Cálculo de áreas

La Función Integral sirve para calcular áreas de graficas, según sean dichas gráficas se usa un método u otro.
A continuación estudiamos los diferentes métodos.

Área de una función sobre el eje		$Área = \int_a^b f(x)dx$
Área de una función debajo del eje		$Área = -\int_a^b f(x)dx$
Área entre dos funciones		$Área = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$ Parecido a la Regla de Barrow, la función superior menos la inferior.
Área entre dos funciones cortando los ejes		$Área = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$ Igual que en el caso anterior, no importa que los ejes se corten ya que lo que queremos es el área de la parte que hay entre ambas funciones, da igual su situación respecto a los ejes.

Ejemplo.

4. Hallar el área de la región limitada por

a)

$y = x^2 - 2$

$y + x = 0$

1º Colocamos las funciones de forma conocida.

$y = x^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$

$y + x = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow g(x) = -x$

2º Hallamos los puntos de corte entre ambas funciones, para ello las igualamos.

$$x^2 - 2 = -x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

3º Debemos saber en que posición esta cada gráfica, para ello no hace falta dibujarlas, con saber el valor de cada una de ellas para un valor x del intervalo, sabemos cual esta por encima.

$f(0) = 0^2 - 2 = -2$

$g(0) = -0$

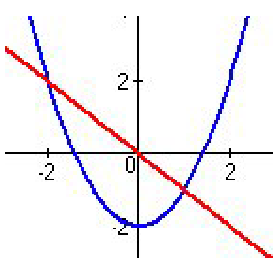
Vemos que g(x) esta por encima de f(x).

4º Sabiendo los puntos de corte y que g(x) es la superior, tenemos que el área de la región será:

$$Área = \int_{-2}^{1} (g(x) - f(x))dx = \int_{-2}^{1} (-x - (x^2 - 2)dx) = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right) = -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 - \frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 = \frac{9}{2} u^2$$

Viendo la gráfica comprobamos que todo esta correcto.



b)

$xy = 2$

$y = 2x$

$x = 2y$

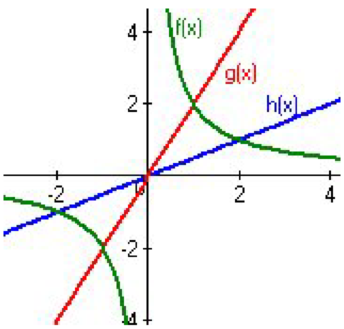
1º Colocamos las funciones de forma conocida.

$$xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x}$$

$$y = 2x \Rightarrow g(x) = 2x$$

$$x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow h(x) = \frac{x}{2}$$

2º Hallamos los puntos de corte entre ambas funciones, como en este caso tenemos tres funciones, tenemos que dibujar las funciones para saber cual se cruza con cual y luego igualaras dos a dos.



Vemos que la región es simétrica, por tanto, valdrá con calcular una zona y luego multiplicar por dos.

En la gráfica vemos que para hallar el área de la región superior, las funciones que cortan son:

f(x) con g(x)

f(x) con h(x)

g(x) con h(x)

Igualamos las funciones en las parejas obtenidas anteriormente;

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow 2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) = h(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

g(x) con h(x) se cruzan en x=0, lo vemos en la gráfica.

Por tanto, como hemos dicho que vamos a hallar la región superior, solo cogemos los puntos de corte que están en la parte superior de los ejes, así que tenemos los siguientes puntos de corte;

a = 0, b=1, c=2

3º Sabiendo los puntos de corte y la posición de cada función, tenemos que el área de la región será:

$$Área = \int_0^1 (g(x) - h(x))dx + \int_1^2 (f(x) - h(x))dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[2\,ln x - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_1^2 = 1^2 - 0^2 - \frac{1^2}{4} + \frac{0^2}{4} + 2\,ln 2 - 2\,ln 1 - \frac{2^2}{4} + \frac{1^2}{4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + 2\,ln 2 - 2\,ln 1 - 1 + \frac{1}{4} = 2\,ln 2 - 2\,ln 1 = 2\,ln 2$$ Área de la región superior

$$Área\ Total = 2 \cdot 2\,ln 2 = 4\,ln 2$$

TEMA 6. SERIES

6.1. Sucesiones

Una sucesión es una colección ordenada de números, que normalmente sigue algún tipo de formula, en función de los números naturales.

$$\{a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ \dots \}$$

Algunos ejemplos de sucesiones, pueden ser

$$\{1 \, , \ 2 \ , \ 3 \ , \ \dots \}$$

$$\{1 \, , \ 4 \, , \ 9 \, , \ 16 \, , \ \dots \}$$

$$\left\{1 \, , \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \dots \ \right\}$$

Y observando estas sucesiones, podemos hallar el *término general* de cada una de ellas, dicho termino general indica la fórmula que sigue cada sucesión, por ejemplo

$$\{1 \, , \ 2 \, , \ 3 \, , \ 4 \, , \ \dots \} \Rightarrow a_n = n$$

$$\{1 \, , \ 4 \, , \ 9 \, , \ 16 \, , \ \dots \} \Rightarrow a_n = n^2$$

$$\left\{1 \, , \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \dots \ \right\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

6.2. Series

Una serie es la suma de todos los elementos de una sucesión

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$$

En los casos anteriores, tendremos las siguientes series;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \infty = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + \infty^2 = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\infty} = ???$$

6.3. Carácter de las series ***

Las series solo pueden tener dos caracteres distintos, dependiendo de su resultado:

Convergente. Si el resultado de la suma es un número finito

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \dots = 0{,}111111\dots$$

Divergente. Si el resultado de la suma es ±∞

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots = \infty$$

6.4. Tipos de series

6.4.1. Series de términos positivos ***

Son aquellas donde todos sus términos son positivos.

Condición necesaria de convergencia.

Para que una serie sea convergente deberá cumplir obligatoriamente que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Dicha condición es necesaria, pero NO suficiente.

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$ Cumple la condición pero no es convergente

$$\sum \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\infty^2} = 0$$ Esta si es convergente

Criterios de convergencia

Los criterios de convergencia son métodos que permiten analizar la convergencia de la serie.

Criterios Absolutos	Criterio del cociente o de D'alembert	Si tenemos una serie $\sum a_n$ calculamos $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = P \Rightarrow \begin{cases} P < 1 \Rightarrow CONVERGENTE \\ P > 1 \Rightarrow DIVERGENTE \\ P = 1 \Rightarrow Criterio\ de\ Raabe \end{cases}$$ Este criterio se usa para series factoriales o exponenciales. A veces se usa en Polinómicas de poco grado.
	Criterio de Raabe	Es una continuación de anterior, en este caso calculamos $$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = P \Rightarrow \begin{cases} P < 1 \Rightarrow DIVERGENTE \\ P > 1 \Rightarrow CONVERGENTE \\ P = 1 \Rightarrow No\ hay\ nada\ que\ hacer \end{cases}$$ Se usa en el mismo tipo de series que el criterio anterior, ya que es su continuación.
	Criterio de la Raíz o de Cauchy	Si tenemos una serie $\sum a_n$ calculamos $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = P \Rightarrow \begin{cases} P < 1 \Rightarrow CONVERGENTE \\ P > 1 \Rightarrow DIVERGENTE \\ P = 1 \Rightarrow ??? \end{cases}$$ Este criterio se usa para series exponenciales o Polinómicas. Nunca en series factoriales.

Criterios Comparativos o de Comparación. Estos criterios se basan en unas series de referencia; a) Serie armónica $\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq 1 \Rightarrow DIV \\ \alpha > 1 \Rightarrow CONV \end{cases}$ b) Serie geométrica $\sum r^n \Rightarrow \begin{cases} r \geq 1 \Rightarrow DIV \\ 0 \leq r < 1 \Rightarrow CONV \end{cases}$	Primer Criterio. No es muy aconsejable. Si queremos analizar una serie $\sum a_n$,la comparamos con otra de referencia $\sum b_n$ $0 \leq \sum a_n \leq \sum b_n \Rightarrow si \ \sum b_n \ es \ CONV \Rightarrow \sum a_n \ es \ CONV$ $\sum a_n \geq \sum b_n \Rightarrow si \ \sum b_n \ es \ DIV \Rightarrow \sum a_n \ es \ DIV$ Segundo Criterio. El más aconsejable de los dos. Si queremos analizar una serie $\sum a_n$,la comparamos con otra de referencia $\sum b_n$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = P \Rightarrow \begin{cases} P \neq 0 \ y \ P \neq \infty \Rightarrow las\ dos\ series\ tienen\ el\ mismo\ caracter \\ P = 0 \Rightarrow \sum b_n \ es\ CONV \Rightarrow \sum a_n \ es\ CONV \\ P = \infty \Rightarrow \sum b_n \ es\ DIV \Rightarrow \sum a_n \ es\ DIV \end{cases}$

<u>Ejemplos de criterios de convergencia</u>

Criterio del cociente o de D'alembert

$$\sum \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n-1)!}{2^{n-1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow 0 < 1 \Rightarrow CONV$$

$$a_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n-1+1}}{(n-1+1)!} = \frac{2^n}{n!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots \qquad (n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots \qquad \left\{ \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \right.$$

$$\sum \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n+1)!\,n!}{(2n)!\,(n+1)!(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)!}{(n+1+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+1)!}$$

$$I_1 = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots}{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots} = (2n+2)(2n+1)$$

$$I_2 = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots}{(n+2)(n+1)(n)(n-1)(n-2)\ldots} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 2n + 4n + 2}{n^2 + n + 2n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 6n + 2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{4}{1} = 4 > 1 \Rightarrow DIVERGENTE$$

Criterio de Raabe

$$\sum \frac{((n!))^2 4^n}{(2n)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!^2 4^{n+1}}{(2(n+1))!}}{\dfrac{((n!))^2 4^n}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(2n)!(n+1)!^2}{4^n(2n+2)!(n!^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$a_n = \frac{n!^2 4^n}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1!)^2 4^{n+1}}{(2(n+1))!}$$

$$I_1 = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-1)\ldots}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$I_2 = \frac{(n+1)!^2}{n!^2} = \frac{(((n+1)(n)(n-1)(n-2)))^2}{((n(n-1)(n-2)\ldots))^2} = (n+1)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n^2+2n+1)}{4n^2+2n+4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \textit{Raabe}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+6n+2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(4n^2+6n+2-4n^2-8n-4)}{4n^2+6n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+6n^2+2n-4n^3-8n^2-4n}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2-2n}{4n^2+6n+2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} < 1 \Rightarrow \textit{DIVERGENTE}$$

Criterio de la Raíz o de Cauchy

$$\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \frac{2}{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow \textit{CONV}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow \textit{Indeterminado}$$

Haciendo un desarrollo de la indeterminación anterior, sabemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\textit{polinomio}} = 1$$

Saber dicho desarrollo no es necesario en esta asignatura.

$$\sum \frac{n^4\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3n}\right)^n}{5^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^4\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3n}\right)^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^4}\ \sqrt[n]{\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3n}\right)^n}}{\sqrt[n]{5^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{1}{3n}\right)}{5} = \frac{\sqrt{3}+\frac{1}{3\infty}}{5} = \frac{\sqrt{3}+0}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} < 1 \Rightarrow \textit{CONV}$$

Segundo Criterio. El más aconsejable de los dos.

$$\sum \frac{1+\lambda\cos^2 n}{n^2+2}$$

1º eliminamos el coseno, sustituyéndolo por el valor más alto que puede tomar, sabiendo que:

$$-1 \le \cos n \le 1$$

$$0 \le \cos^2 n \le 1$$

Vemos que el valor mas alto que puede ser es λ

$$0 \le \lambda\cos^2 n \le \lambda$$

Por tanto, la serie queda:

$$\sum \frac{1+\lambda}{n^2+2}$$

2º Comparamos la serie con la serie armónica, porque es una cociente de polinomios. Elegimos la armónica y el valor de $\propto$ como la resta de los exponentes de la serie.

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{\propto}} = \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\lambda}{n^2+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\lambda)n^2}{n^2+2} = \frac{1+\lambda}{1} = 1+\lambda$$

El límite de un cociente de polinomios es el cociente de los factores con mayor grado.

Por tanto, según las respuestas que nos dan:

a) No convergente para $\lambda = 1$

$\lambda = 1 \Rightarrow 1+\lambda = 2 \Rightarrow P \ne 0 \;\; y \;\; P \ne \infty \Rightarrow a_n = b_n \Rightarrow CONVERGENTE \Rightarrow Esta\ opcion\ \ es\ Falsa$

b) Convergente solo para $0 \le \lambda < 1$

Ya hemos visto que para $\lambda = 1$ es convergente, por tanto esta opción también es Falsa

c) Ninguna de las anteriores

Esta es la solución.

6.4.2. Series alternantes u ordenantes ***

Es una serie cuyos términos alternan el signo, mediante un coeficiente que provoca la alternancia.

$$\sum (-1)^n \cdot a_n$$

$$\sum \cos(\pi n) \cdot a_n$$

Para resolver este tipo de series, debemos aplicar el criterio de Leibnitz.

6.4.2.1. Criterio de Leibnitz

Condición necesaria de convergencia.

Si tenemos una serie de la forma $\sum (-1)^n \cdot a_n$ y queremos que converja, debe cumplir que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Método de Leibnitz

1er Paso. Estudiamos la serie con los términos positivos solamente $\sum a_n$

a) Si $\sum a_n$ converge => absolutamente convergente

b) Si $\sum a_n$ diverge => paso 2º

2º Paso. Estudiamos la serie completa, con los términos alternantes.

a) $\sum (-1)^n \cdot a_n$ converge => condicionalmente convergente

b) $\sum (-1)^n \cdot a_n$ diverge => divergente

Ejemplo.

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

Vemos que es una serie alternantes, por tanto aplicamos Leibnitz

1º Paso. Estudiamos la serie solo con los términos positivos.

$$\sum \frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

Aplicamos el segundo criterio de comparación, siendo nuestra serie de referencia:

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \ \forall\ \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow DIVERGENTE$$

Exponente = exponente del denominador menos exponente del dividendo. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \frac{1}{1} = 1$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter, así que nuestra serie tiene un carácter divergente, por tanto, debemos pasar al 2º Paso.

2º Paso. Estudiamos la serie con todos los términos.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \textit{CONVERGE} \Rightarrow \textit{CONDICIONALMENTE CONVERGENTE}$$

Cogemos los coeficientes de la n de mayor grado, en este caso el mayor grado es 1, así que elegimos los coeficientes de grado = 1.

Ejemplo

$$\sum \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{n+1}$$

La parte del seno, solo es para hacer que la serie sea alternante.

1º Paso. Estudiamos la serie solo con los términos positivos.

$$\sum \frac{1}{n+1}$$

Estudiamos la serie mediante el criterio de comparación, que es el mejor para cocientes, por tanto, tenemos que la serie de referencia es:

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \ \forall \ \alpha \underset{1-0=1}{=} 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \ \textit{DIVERGENTE}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow \textit{DIVERGE}$$

2º Paso. Estudiamos toda la serie.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \textit{CONVERGENTE} \Rightarrow \ \textit{CONDICIONALMENTE CONVERGENTE}$$

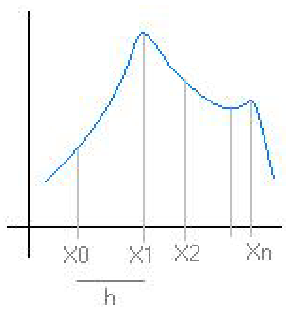
6.4.3. Tabla resumen de Series

Series de términos positivos	Criterios Absolutos	Criterio del cociente
		Criterio de Raabe
		Criterio de Raíz de Cauchy
	Criterios Comparativos	Primer criterio
		Segundo criterio
Series alternantes	Criterio de Leibnitz	

TEMA 7. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA

7.1. Introducción

La interpolación Polinómica es una aproximación polinómica de una función, en un intervalo [a,b]
Es decir, conociendo algunos puntos de la función, podemos buscar un polinomio que pase exactamente por esos puntos, y de esta forma, encontrar una aproximación a la función.
Sabiendo que:



Los puntos de f conocidos son *nodos* x_0, x_1, x_n
La distancia entre nodos se llama *distancia internodal* h
El grado del Polinomio Interpolar, es igual al número de nodos menos uno (n-1)

7.2. Métodos para hallar el Polinomio Interpolar

7.2.1. Métodos generales

Para hallar el polinomio Interpolar, existen dos métodos, cualquiera de los dos son válidos siempre.

7.2.1.1. Método de Lagrange ***

Tenemos la función f(x)
Tenemos los nodos x_0, x_1, x_2
El Polinomio Interpolar será:

$$P_2(x) = f(x_0)L_2^0 + f(x_1)L_2^1 + f(x_2)L_2^2$$

Sabiendo que:

$$L_2^0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_2^1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

Restamos a x todos los nodos menos el del término
Restamos al nodo del termino, todos los demás nodos

$$L_2^1 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Ejemplo. Sea P_3 el polinomio de tercer grado cuya grafica pasa por los puntos (-2,3), (0,0), (1,3) y (2,1). Hallar P_3.

$$(-2,3) \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = 3 \qquad (0,0) \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$$

$$(1,3) \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow f(x_2) = 3 \qquad (2,1) \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow f(x_3) = 1$$

Los términos serán:

$$L_3^0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)} = \frac{x(x-1)(x-2)}{-24}$$

$$L_3^1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0-1)(0-2)} = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{4}$$

$$L_3^2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1-0)(1-2)} = \frac{(x+2)x(x-2)}{-3}$$

$$L_3^3 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2-0)(2-1)} = \frac{(x+2)x(x-1)}{8}$$

Así que el polinomio queda de la siguiente forma:

$$P_3(x) = 3\cdot\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{-24}\right] + 0\cdot L_3^1 + 3\cdot\left[\frac{x(x+2)(x-2)}{-3}\right] + 1\cdot\left[\frac{x(x+2)(x-1)}{8}\right] =$$

$$= -\frac{3}{24}x(x-1)(x-2) - \frac{3}{3}x(x+2)(x-2) + \frac{1}{8}x(x+2)(x+1)$$

Por tanto,

$$P_3(-1) = \frac{-18}{-24} - 3 + \frac{2}{8} = \frac{3}{4} - 3 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - 3 = -2$$

$$P_3(3) = \frac{18}{-24} - 15 + \frac{30}{8} = -\frac{3}{4} - 15 + \frac{15}{4} = \frac{12}{4} - 15 = -12$$

7.2.1.2. Método de Newton

Tenemos la función f(x)
Tenemos los nodos x_0, x_1, x_2
El Polinomio Interpolar será:

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$$

Sabiendo que:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$a_2 = \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

7.2.3. Método especial. Método de Newton-Gregory ***

Este método es un método especial para nodos equidistantes, es decir, que la distancia internodal sea siempre la misma.

El método consiste en hacer un triangulo de diferencias.

nodo	función	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
x_0	$f(x_0)$	$f(x_1)-f(x_0)$	$f(x_2)-f(x_1)-(f(x_1)-f(x_0))$	$f(x_3)-f(x_2)-(f(x_2)-f(x_1))-(f(x_2)-f(x_1)-(f(x_1)-f(x_0)))$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_2)-f(x_1)$	$f(x_3)-f(x_2)-(f(x_2)-f(x_1))$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_3)-f(x_2)$		
x_3	$f(x_3)$			

Hemos ido restando al de abajo lo de arriba, sucesivamente, hasta quedarnos con un solo término.

Nos fijamos en la parte superior del triangulo, para hallar el polinomio interpolar.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f}{1!\,h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \frac{\Delta^3 f}{3!\,h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Ejemplo

Sea $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x)$ hallar el polinomio interpolar relativo a los nodos $x_0=1$, $x_1=2$, $x_2=3$.

Vemos que h = 1 siempre.
Hacemos el triangulo de diferencias, sabiendo que:

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = 1 - 1 = 0$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}2\right) + \cos(\pi 2) = 0 + 1 = 1$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow f(x_2) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \cos(\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}3\right) + \cos(\pi 3) = -1 - 1 = -2$$

n	f	Δf	$\Delta^2 f$
1	0	1	-4
2	1	-3	
3	-2		

Por tanto, tenemos que el polinomio interpolar

$$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!1}(x-x_0) + \frac{-4}{2!1^2}(x-x_0)(x-x_1) = (x-1) - \frac{4}{2}(x-1)(x-2) = (x-1) - 2(x-1)(x-2)$$

Y ahora sustituimos la x por los valores que necesitemos.

CUADRO RESUMEN DE FÓRMULAS IMPORTANTES *** libro

Fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Datos Trigonométricos

Ángulos	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π
sen x	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	0	-1/2	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Logaritmos conocidos

Ln 1 = 0 — Ln 0 = - ∞

Ln e = 1 — Ln ∞ = ∞

$\ln e^2 = 2$

$\ln e^3 = 3$

Exponenciales conocidas

$e^1 = e$ — $e^{\infty} = \infty$

$e^0 = 1$ — $e^{-\infty} = 0$

Propiedades Logarítmicas

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ — $\ln(a^b) = b \ln a$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

No Indeterminaciones

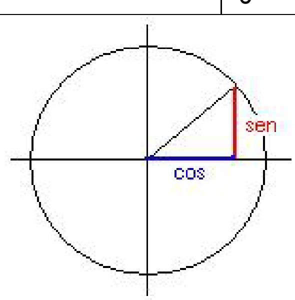
$\frac{\infty}{0} = \infty$ — $\frac{0}{\infty} = 0$

$\infty^{\infty} = \infty$ — $0 \cdot 0 = 0$

$\infty + \infty = \infty$ — $\infty \cdot \infty = \infty$

$\frac{a}{\infty} = 0$ — $\frac{\infty}{a} = \infty$

$\frac{a}{0} = \infty$ — $\frac{0}{a} = 0$



LAURA ALVAREZ DE FRUTOS. CURSO 03/04.